

# 第五节 双组分精馏的设计型计算

## 一、理论板数的计算

### 1、精馏设计型计算的命题

根据分离要求选择操作条件，计算所需的理论塔板数。

**分离要求**：对塔顶、塔底产品的质量 and 产率提出要求，一般用有用组分的产率或**回收率**来表示：

$$\eta = \frac{Dx_D}{Fx_f}$$

物衡式  $\begin{cases} F = D + W \\ F \cdot x_f = Dx_D + Wx_w \end{cases}$

一般 $F$ 、 $x_f$ 已知，两个方程，四个未知数，若选定两个，则剩下两个可求出来，所以，规定分离要求时只能指定两个。即：

$$a、(x_D, D)$$

$$b、(x_w, W)$$

$$c、(\eta, x_D)$$

进行设计的数据还不足、需要选参数。

选 $P$ 、 $R$ （回流比）、 $q$ （进料状态）

$P$ ——加压、减压、常压。

$R$ ——增大，操作费用增加

确定：塔板数 $N$



## 2、逐板计算法

### 方法一、物料衡算式和平衡关系交替使用

连续精馏塔，塔顶全凝器，泡点回流

对全凝器作物衡算：

$$V = L + D$$

全凝器：

$$Vy_1 = Lx_0 + Dx_D$$

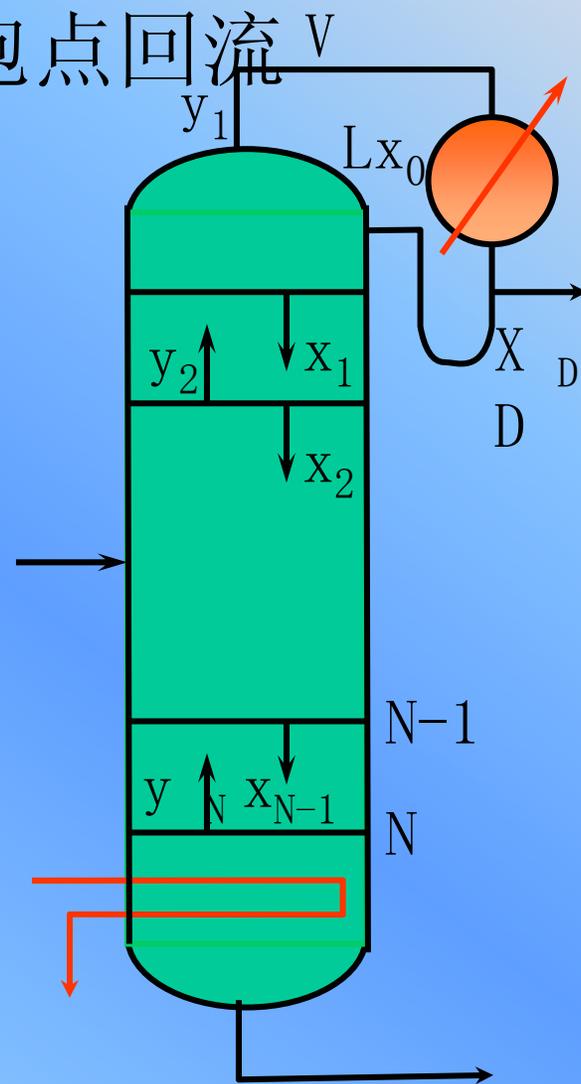
$$\Rightarrow Vy_1 - Lx_0 = Dx_D$$

第一块板：

$$Vy_2 + Lx_0 = Lx_1 + Vy_1$$

$$\Rightarrow Vy_2 - Lx_1 = Vy_1 - Lx_0$$

$$= Dx_D$$





$$x_0 = x_D = y_1$$

$$x_1 \xrightarrow{\text{平衡}} y_1 \quad y_1 = \frac{\alpha x_1}{1 + (\alpha - 1) x_1} \Rightarrow x_1$$

$$x_1 \xrightarrow{\text{物衡}} y_2$$

$$y_2 \xrightarrow{\text{平衡}} x_2$$

$$\text{第二块板 } Vy_3 - Lx_2 = Dx_D \dots\dots$$

$$\text{第}n\text{块板 } Vy_{n+1} - Lx_n = Dx_D$$

$$\text{提馏段 } \bar{V}y_{n+1} - \bar{L}x_n = Dx_D - Fx_f$$

$$\text{精馏段 } Vy_{n-1} - Lx_n = Dx_D$$

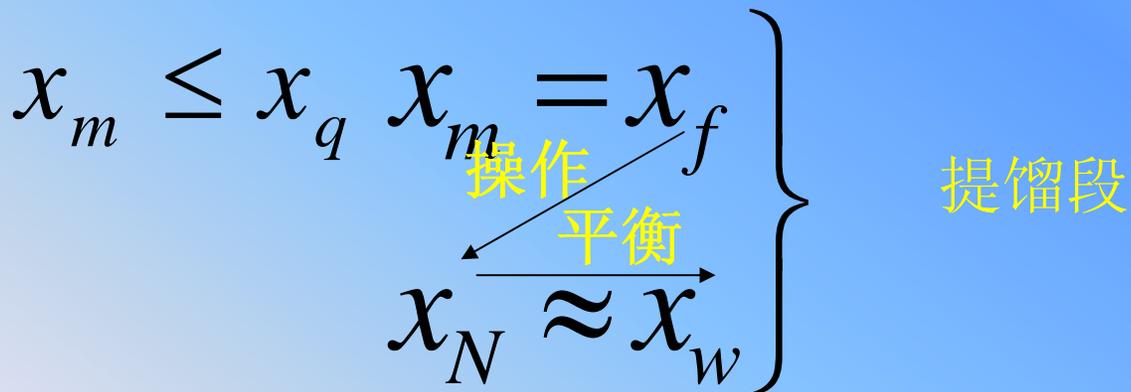
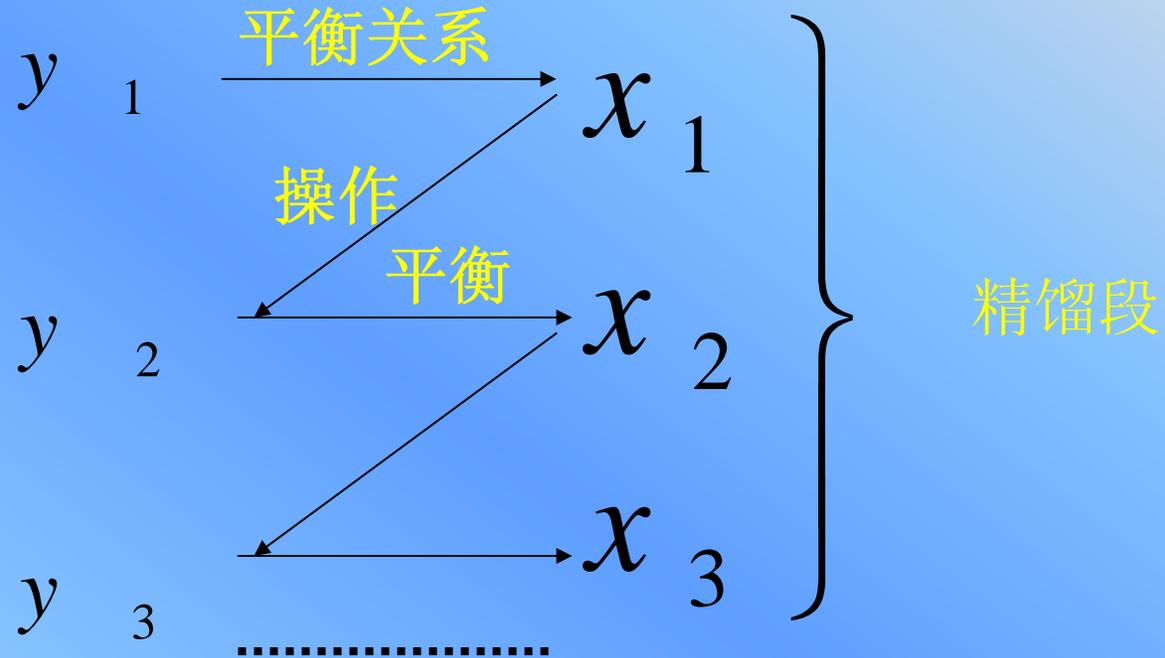
结论:精馏段, 从下一块板上带入的气体中所含易挥发组分的量与从该塔板上带走的液相中所含易挥发组分的量之差比为D  $x_D$



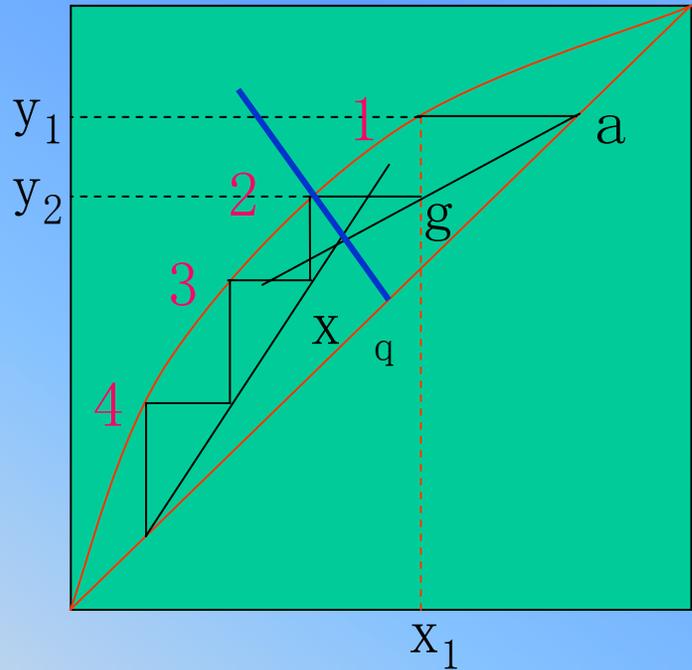
方法二、操作线与平衡关系交替使用。

对全凝器

$$y_1 = x_D$$



### 3、图解法求理论塔板数



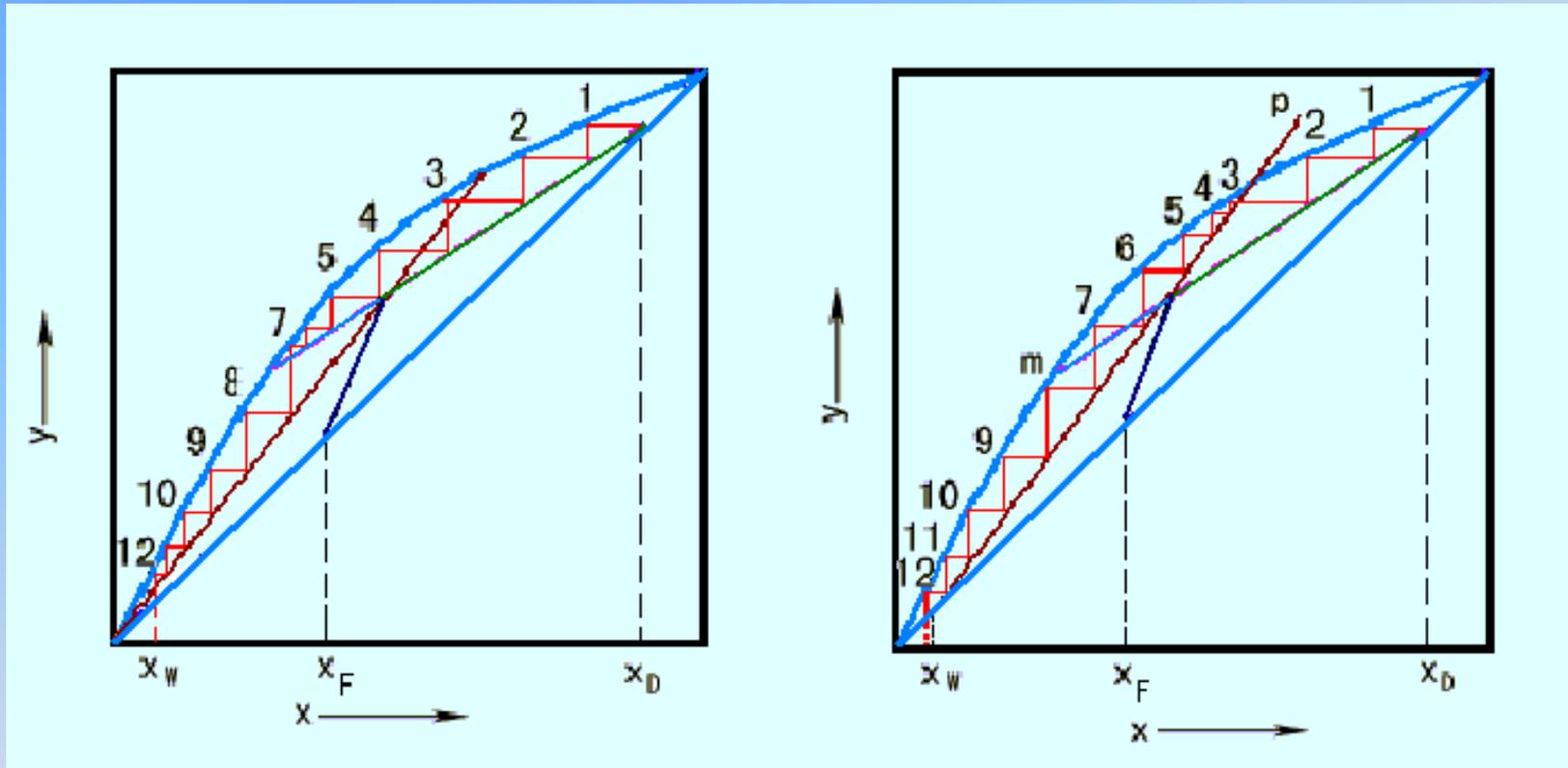
- 1、在  $y \sim x$  图上做平衡与操作线
- 2、  $a (x_D, x_D)$ ，过  $a$  作水平线与平衡线交一点，它的坐标为  $(x_1, y_1)$ 。
- 3、由  $x_1$  求  $y_2$ ，利用操作线过  $(x_1, y_1)$  作垂直线叫操作线于  $g$  点， $g$  坐标为  $(x_1, y_2)$

$$x_m \leq x_q$$

在提馏段操作线与平衡线之间画阶梯

# 4、最优加料位置的确定

最优加料板位置： $x \leq x_q$



加料过晚

加料过早

过早或过晚加料都可是理论板数增加。

## 二、回流比的选择

$$\left. \begin{array}{l} R = \frac{L}{D} \\ V = L + D \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{L}{V} = \frac{R}{R+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R}}$$

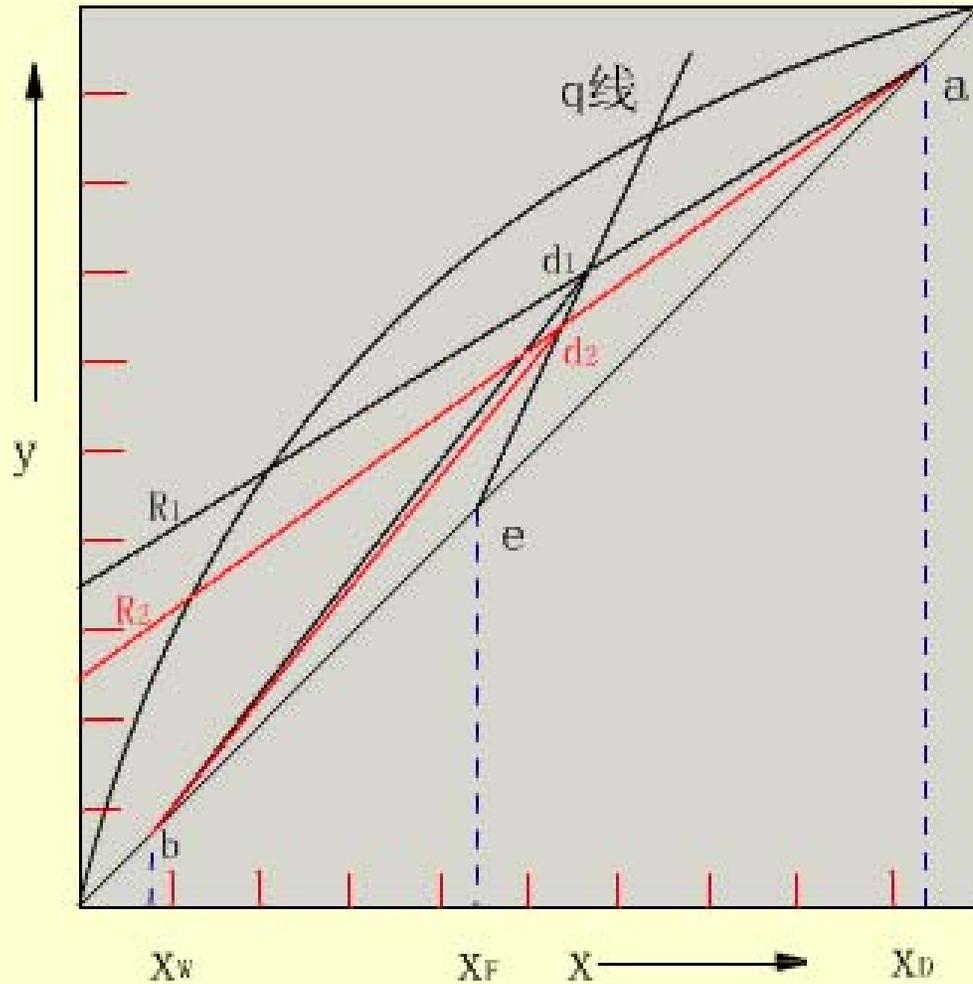
$$\frac{\bar{L}}{\bar{V}} = \frac{RD + qF}{(R+1)D - (1-q)F} = \frac{RD + qF}{RD + qF - (F - D)} = \frac{1}{1 - \frac{F - D}{RD + qF}}$$

$$R \uparrow \quad \frac{\bar{L}}{\bar{V}} \downarrow \quad \frac{L}{V} \uparrow$$

$R \uparrow \longrightarrow$  操作线远离平衡线  $\longrightarrow N_T \downarrow \longrightarrow$  设备费  $\downarrow$

$\downarrow$   
 $\longrightarrow L \uparrow, V \uparrow, V' \uparrow \longrightarrow$  冷凝器、再沸器热负荷  $\uparrow$   
 $\longrightarrow$  操作费  $\uparrow$

# 回流比的影响



增加回流比，即 $R_2 > R_1$

**对设计的影响：**

对于一定的分离要求，  
两操作线向参考线靠拢，  
所需理论板数减少，  
塔高降低，

因为  $V = (R+1) D$ ,

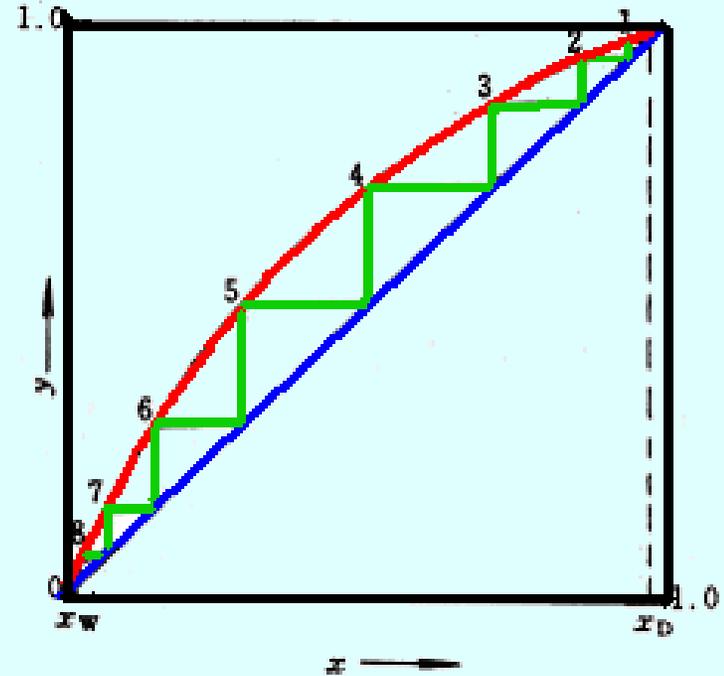
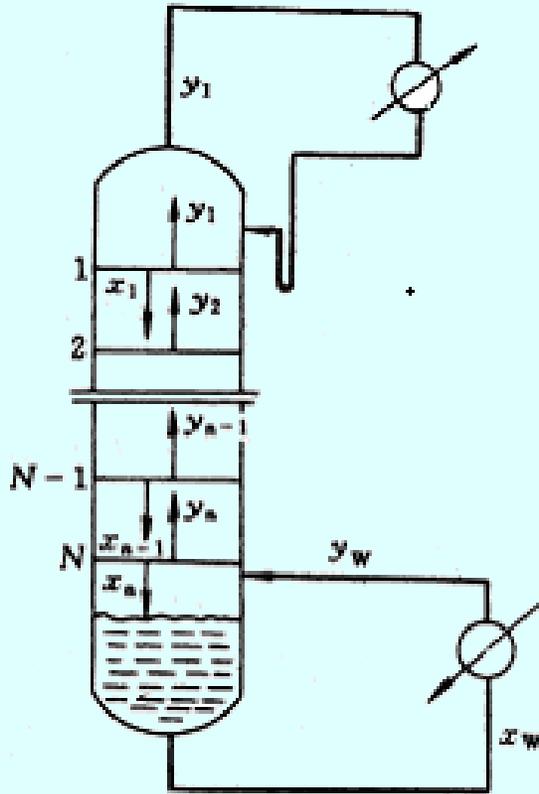
$$V' = V - (1-q) F$$

所以  $R \uparrow$ ， $V \uparrow$ ， $V' \uparrow$ ，  
使操作费  $\uparrow$

从定义看  $R = 0 \sim \infty$   $\begin{cases} R = 0 \text{ 时, } L = 0 \text{ 无回流} \\ R = \infty \text{ 时, } D = 0 \text{ 全回流} \end{cases}$

但在技术上对回流比还有限制，存在着一个  $R_{mi}$   
 即：实际回流比不能小于  $R_{mi}$  ，即使有无穷多个理论板分离也达不到设计要求。

# 1、全回流及最少理论板数





# 1、全回流及最少理论板数

精馏段操作线方程 
$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} x_n + \frac{1}{R+1} x_D$$

物衡式 
$$\begin{cases} F = D + W \\ Fx_f = Dx_D + Wx_w \end{cases}$$

$$\therefore D = 0$$

全回流时

$$\therefore F = W, Fx_f = Wx_w$$

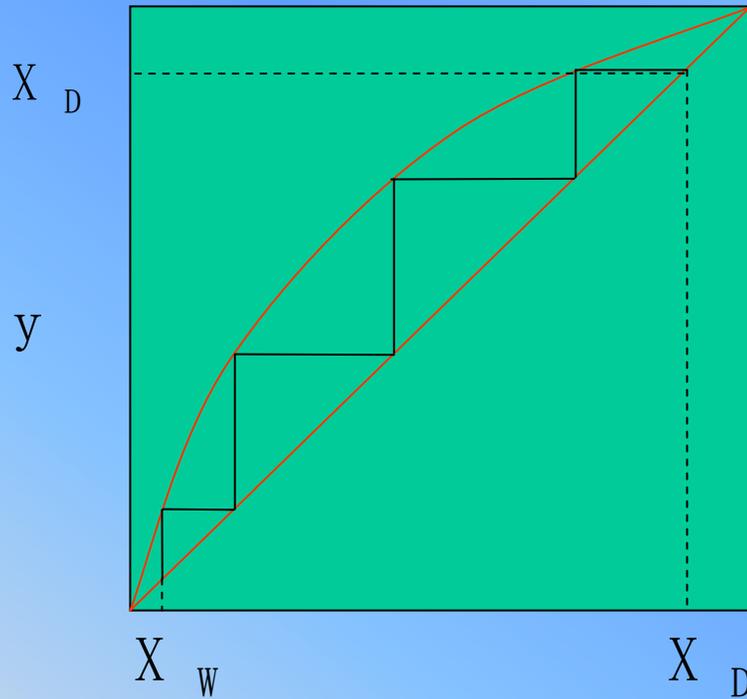
$$R = \frac{L}{D} = \infty$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R}} x_n + \frac{1}{R+1} x_D = x_n$$

即操作线方程

$$y_{n+1} = y_n$$

操作线与对角线重合。



全回流的特点：

- 1、全回流时所需塔板数最少；
- 2、两板之间的任一截面上, 上升蒸汽的组成与下降液体的组成相等。

设溶液为理想溶液，塔顶设有冷凝器

$$\therefore y_1 = x_D, \left(\frac{y_A}{y_B}\right)_1 = \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_D$$

$$\text{又 } \alpha_1 = \frac{\left(\frac{y_A}{y_B}\right)_1}{\left(\frac{x_A}{x_B}\right)_1}$$

$$\therefore \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_1 = \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{y_A}{y_B}\right)_1 = \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_D$$



$\alpha_1$  —— 第一块板上液体的相对挥发度

$$y_n = x_{n-1} \quad \text{对第二块板} \quad y_2 = x_1$$

$$\therefore \left(\frac{y_A}{y_B}\right)_2 = \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_1 = \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_D$$

$$\text{又 } \alpha_2 = \frac{\left(\frac{y_A}{y_B}\right)_2}{\left(\frac{x_A}{x_B}\right)_2}$$

$$\therefore \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_2 = \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{y_A}{y_B}\right)_2 = \frac{1}{\alpha_2 \alpha_1} \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_D$$

$$\text{可推出: } \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_N = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N} \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_D$$

当液体组成已达到指定的釜液组成  $(\frac{x_A}{x_B})_w$  时，  
N就是全回流时所需的最少理论塔板数，记为： $N_{\min}$

$$\text{取平均值 } \alpha = \sqrt[N]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N}$$

$$\left(\frac{x_A}{x_B}\right)_N = \frac{1}{\alpha^N} \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_D$$

$$\text{两边取对数 } N_{\min} = \frac{\log \left[ \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_D / \left(\frac{x_A}{x_B}\right)_N \right]}{\log \alpha}$$

→ (包括塔釜)

⇒ 芬斯克方程

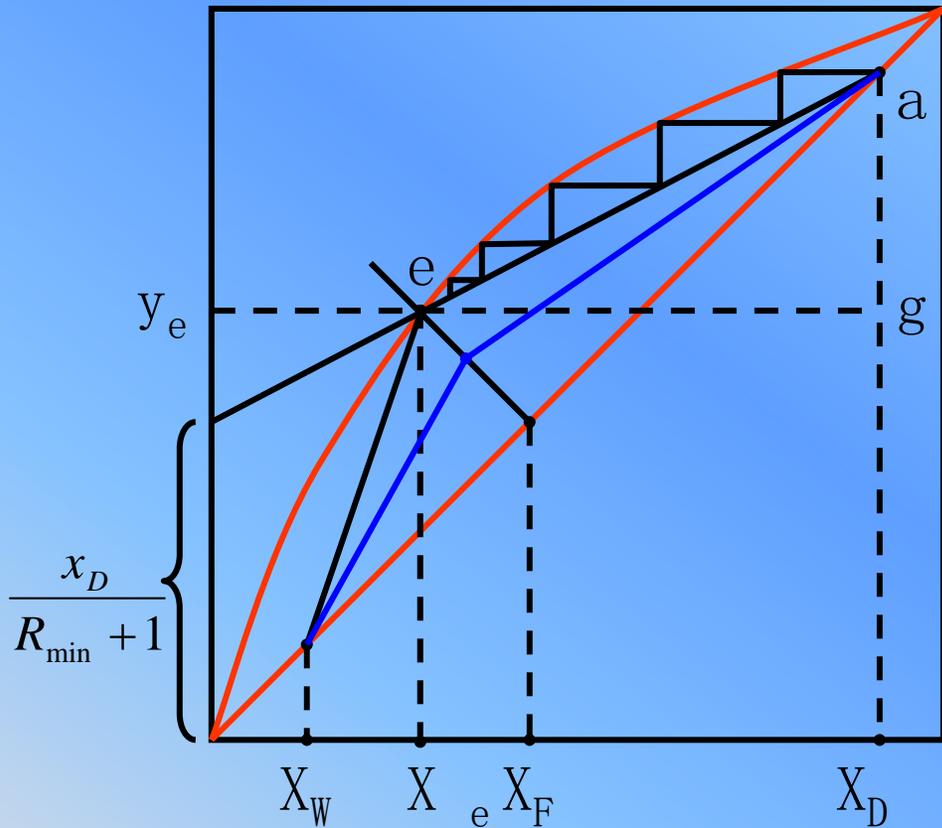
若塔顶、塔釜的挥发度相差不大时，

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{\text{顶}} \alpha_{\text{釜}}} \quad (\text{几何平均值})$$

$$N_{\min} = \frac{\log \left[ \left( \frac{x_D}{1-x_D} \right) \left( \frac{1-x_w}{x_w} \right) \right]}{\log \alpha}$$

全回流时操作回流比为极限：不出产品，所以只是在科研、开车、调试级停车时采用。





$$R_{\min}$$

可用斜率求，也可用截距求

$$\frac{R_{\min}}{R_{\min} + 1} = \frac{x_D - y_e}{x_D - x_e}$$

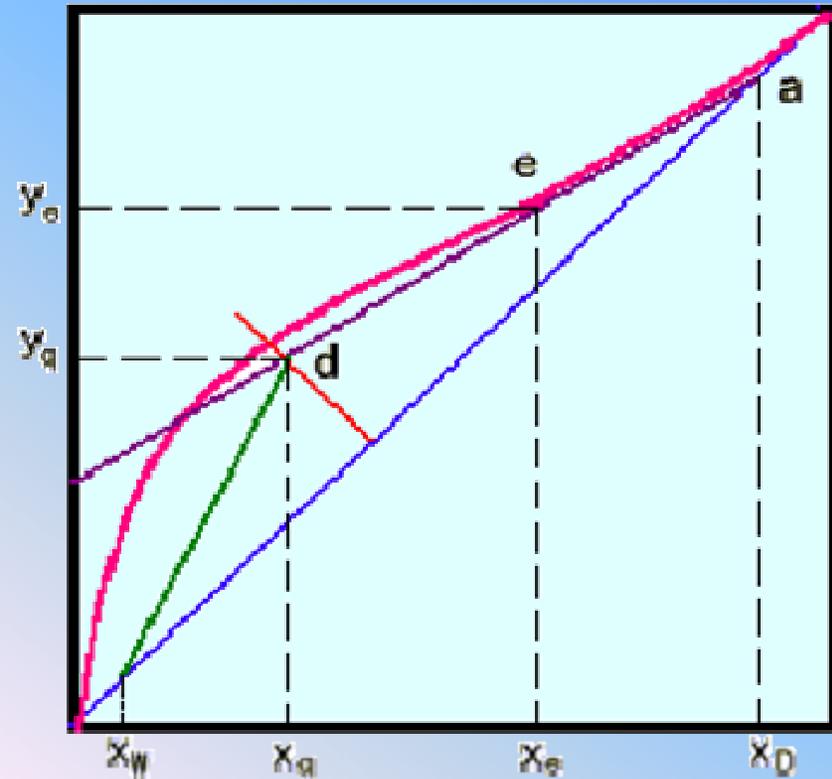
截距为： $\frac{x_D}{R_{\min} + 1}$

图 9-31 最小回流比

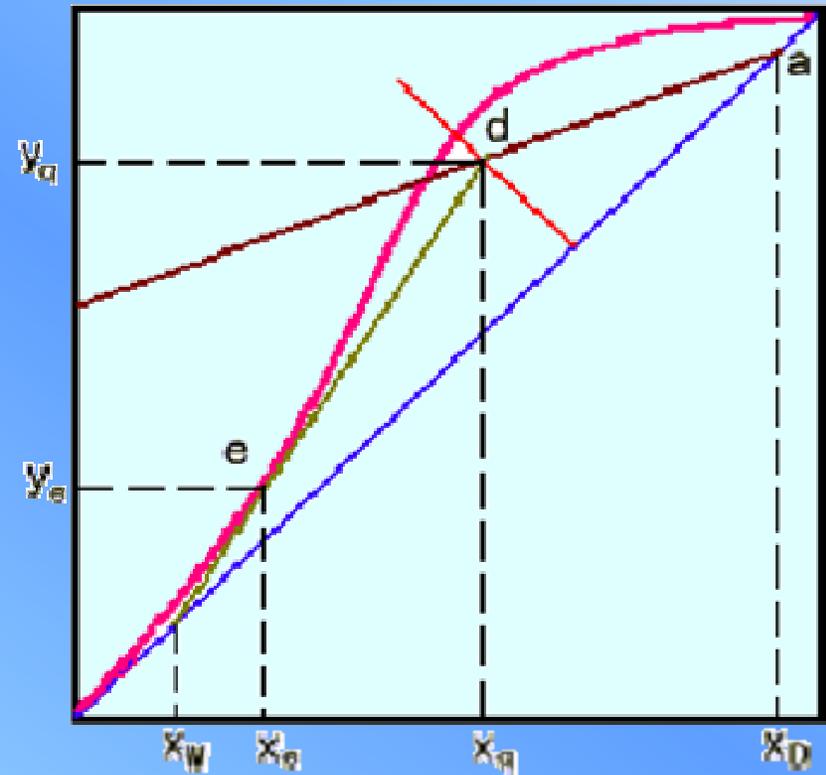
$R_{\min}$  与平衡线的形状有关，请看下页图

# 不同平衡线形状的最小回流比

$$R_{\min} = \frac{x_D - y_e}{y_q - x_e}$$



(a)



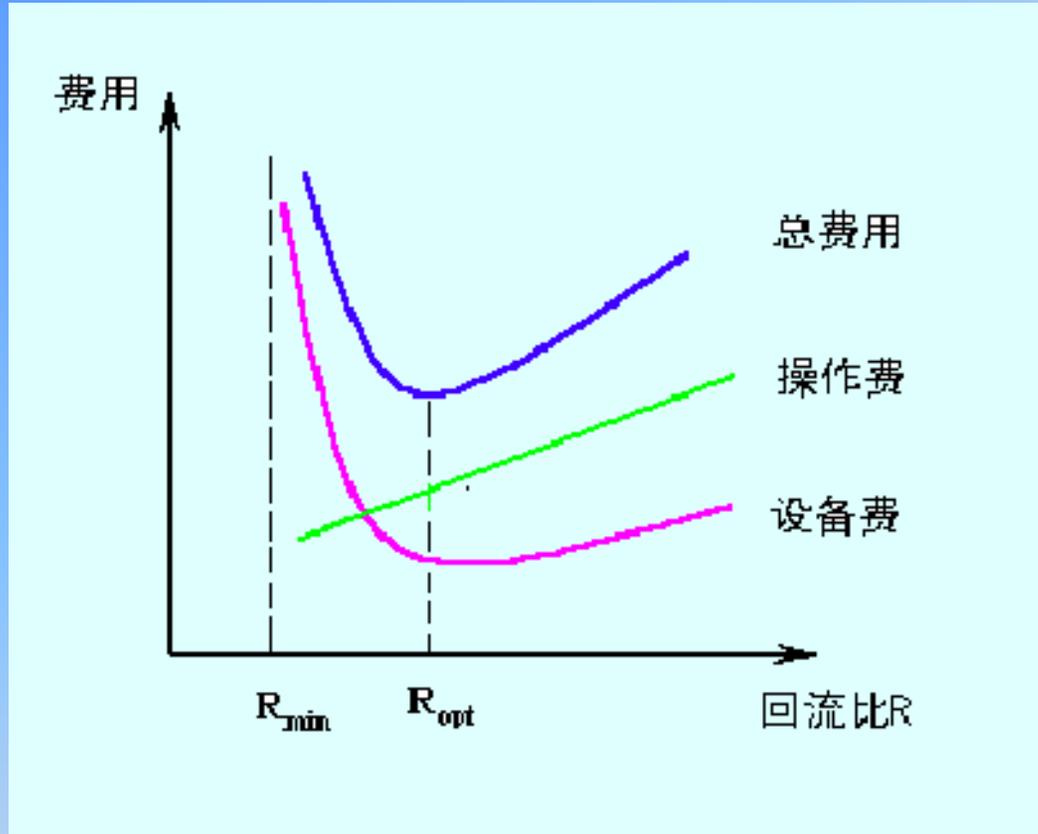
(b)

上面三个图上的e点称为挟点, 当回流比为最小值时, 用逐板计算法自上而下计算各板组成, 会出现一恒浓区, 当组成趋近切点或交点e时, 两板间的浓度差  $x_{n+1} = x_n$  很小, 每一块板的提浓作用很小。

最小回流比与物系的相平衡性质及塔顶、塔底的浓度有关。对于指定物系, 最小回流比值取决于混合物的分离要求。

### 3、最适宜回流比的选取

$R \uparrow, L, V \uparrow$  操作费用  $\uparrow$ ，但设备费用  $\downarrow$



适宜回流比：
$$R_{opt} = (1.2 \sim 2)R_{min}, \left(\frac{L}{G}\right) = (1.1 \sim 2)\left(\frac{L}{G}\right)_{min}$$

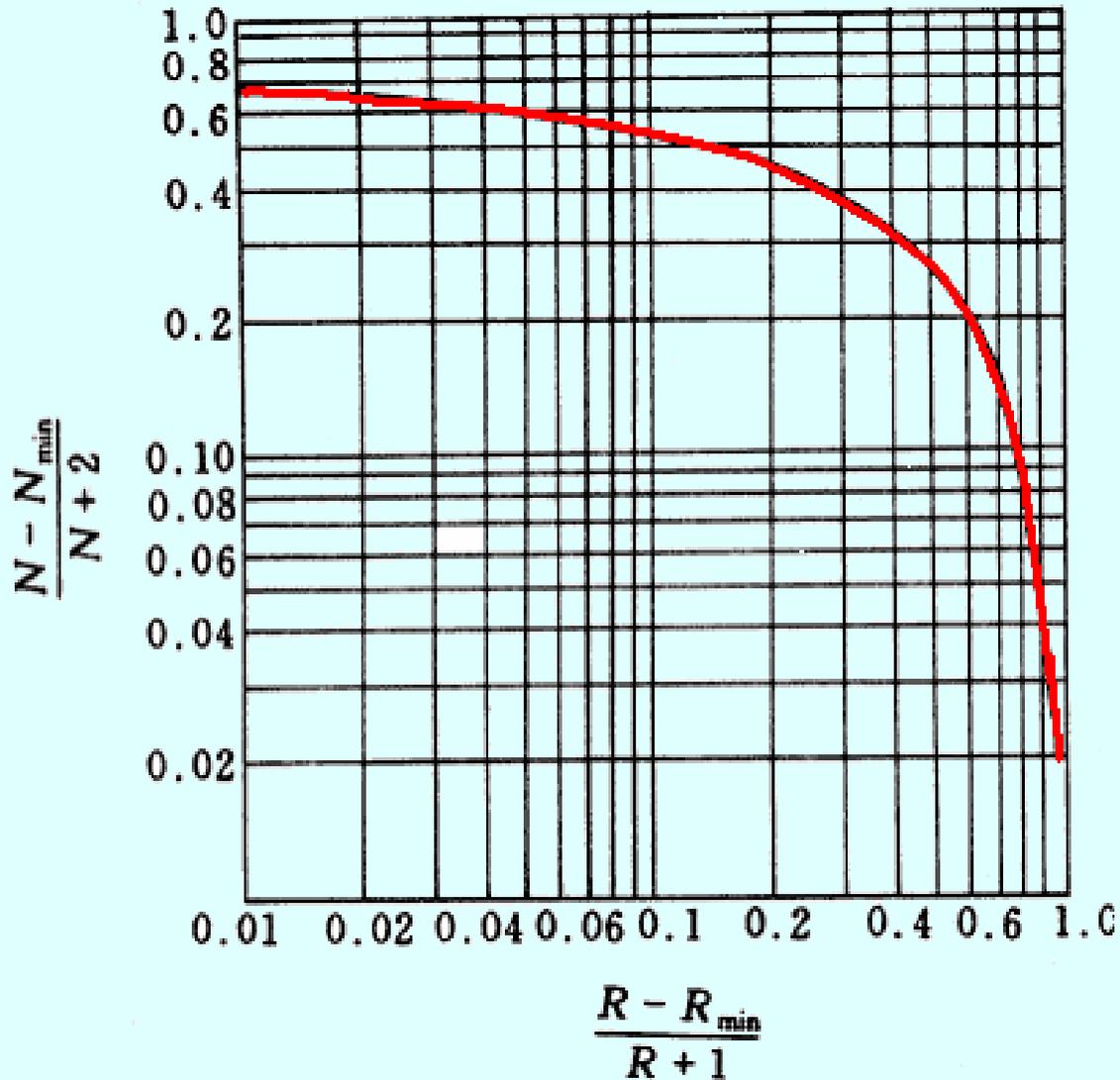


## 4、理论板数的捷算法

利用吉利兰关联图求理论板数是一种经验方法。先求出  $R_{\min}$  及全回流条件下的  $N_{\min}$ ，根据指定的R，用图9-35求N。

当  $\frac{R - R_{\min}}{R + 1} < 0.17$  时, 可用公式求 N:

$$\lg \frac{N - N_{\min}}{N + 1} = -0.9 \left( \frac{R - R_{\min}}{R + 1} \right) - 0.17$$



1、先算 $R_{min}$

2、 $R = (1.1-2) R_{min}$

3、 $N_{min} \Rightarrow$ 由坐标 $Y \Rightarrow N$

例1、用一精馏塔分离甲醇-水混合液，已知：  
 $x_F=0.628$  (摩尔分率，下同)， $x_D=0.965$ ， $x_W=0.03$ ，泡点进料，回流比 $R=1.95$ ，  
 试：按逐板计算法确定理论塔板数。并近似用图解法表示第二块板下降液体组成和上升蒸汽组成。

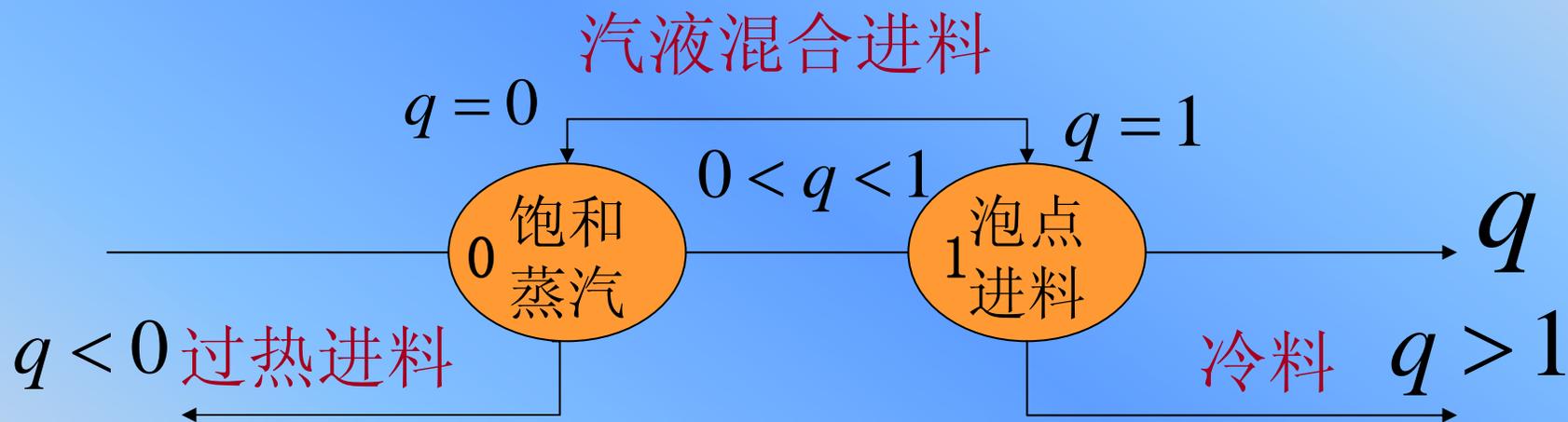
例2、在常压连续精馏塔中分离苯-甲苯混合液，已知  
 $X_F=0.4$  (摩尔分率、下同)， $X_D=0.97$ ， $X_W=0.04$  相对挥发度  $\alpha=2.47$ 。试分别求以下三种进料方式下的最小回流比和全回流下的最小理论板数。

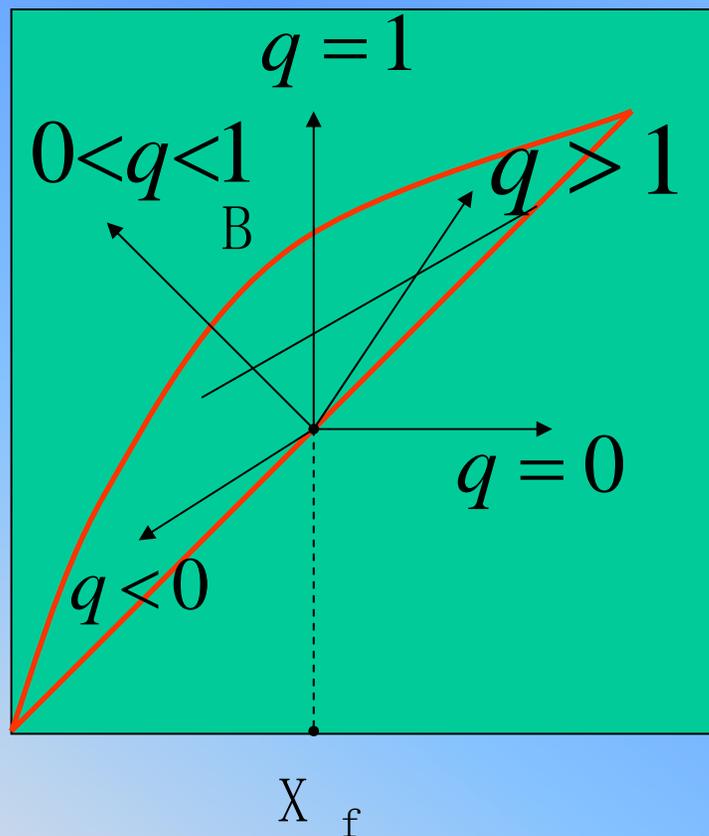
(1) 冷液进料 $q=1.387$  (2) 泡点进料 (3) 饱和蒸汽进料



### 三、加料热状态的选择

进料状态可用 $q$ 值来表示， $q$ 指表示加料中饱和液体所占的分率。





分离要求及R一定的条件下， $q$ 变化时：

1、精馏段操作线不受 $q$ 影响，但影响提馏段操作线的位置，因为 $q$ 值变化， $q$ 线斜率也变化，从而使精馏段与 $q$ 线交点改变。

2、 $q$ 值不同，影响加料板位置。

3、 $q$ 值不同，影响理论板数 $N$ ，从图上可以看出， $q$ 值大（即进冷料）所需要的理论板数减少。

A、对不同 $q$ 所作的比较是以固定回流比 $R$ ，以固定塔顶冷凝量不变为基准的，作全塔热衡算

$$Q_{\text{冷凝}} = Q_{\text{进料}} + Q_{\text{釜}}$$

$$Vr_{\text{汽}} = Q_{\text{进料}} + \bar{V}r$$

如 $Q_{\text{冷凝}}$ 一定， $Q_{\text{进料}}$ 越多， $q$ 越小， $\bar{V}$ 也越小，使提馏段的操作线斜率 $\left(\frac{\bar{L}}{\bar{V}}\right)$ 增大。其位置向平衡线移近，所需理论塔板数比增多。

结论： $q$ 越小， $N$ 越大



$Q_{\text{塔釜}}$  不变,  $Q_{\text{进料}}$  越多, 则塔顶冷却量必然增大,  $R \uparrow$   $N \downarrow$  以增加能耗换取  $N$  的减少, **结论: 设备费下降而操作费增加**

从精馏本身考虑, 通常应进冷料。热量和冷量应尽可能的设在塔顶或塔底, 即: 是回流在全过程中发挥作用, 否则对精馏没有好处。但有时实际操作中利用废热把进料加热, 这只是工艺条件, 而不是精馏本身要求的。

# 1、双组分精馏过程的其它类型

## (一) 直接蒸汽加热

操作前提:

1、物料中有水

2、水是重组分，从塔釜出去

使用的物系：某种轻组分与水的混合物。

通常将饱和蒸汽作为加热蒸汽直接通入塔釜来汽化釜液，按恒摩尔流的假定，加入的饱和蒸汽量等于  $\bar{V}$ 。

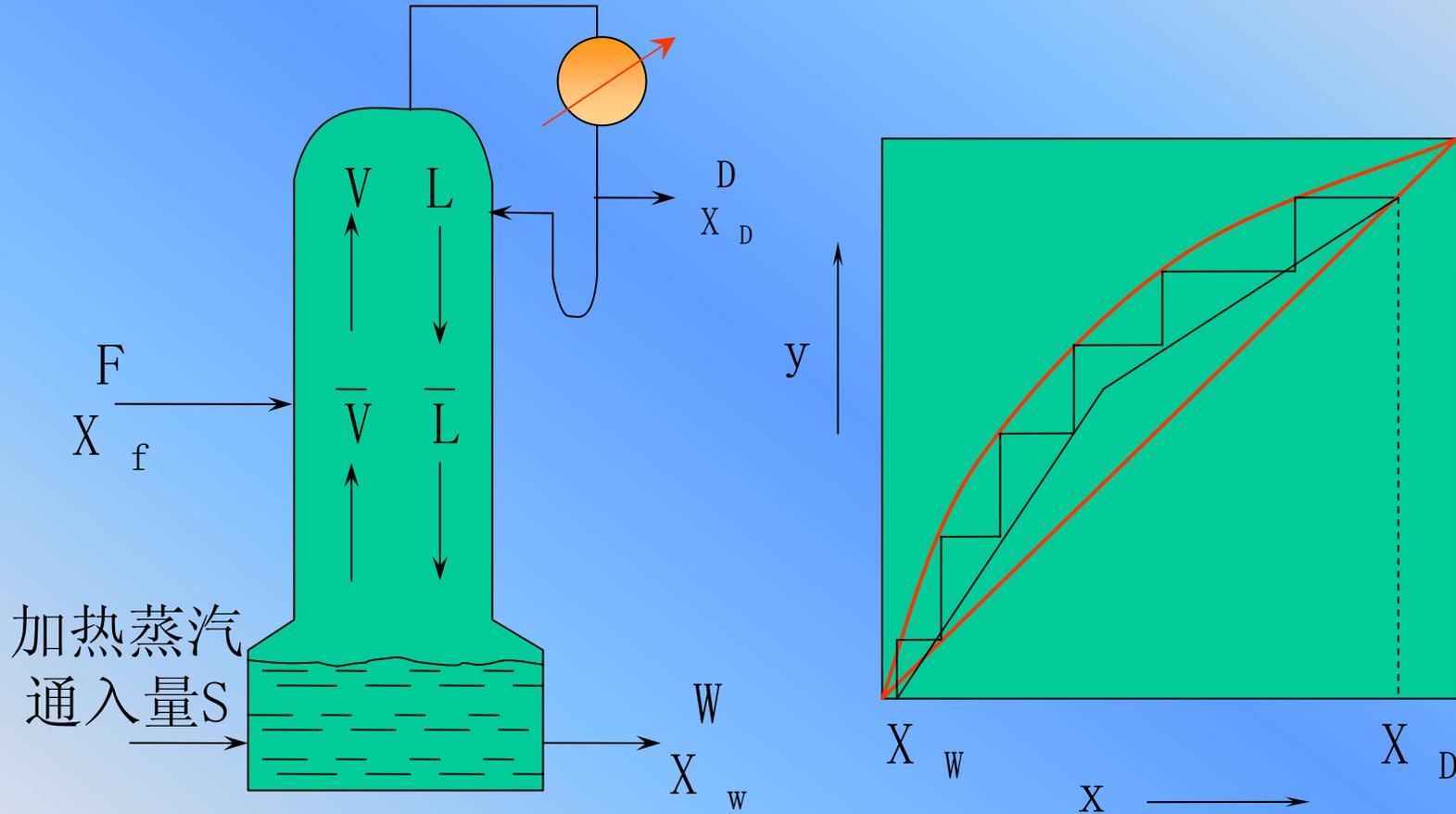
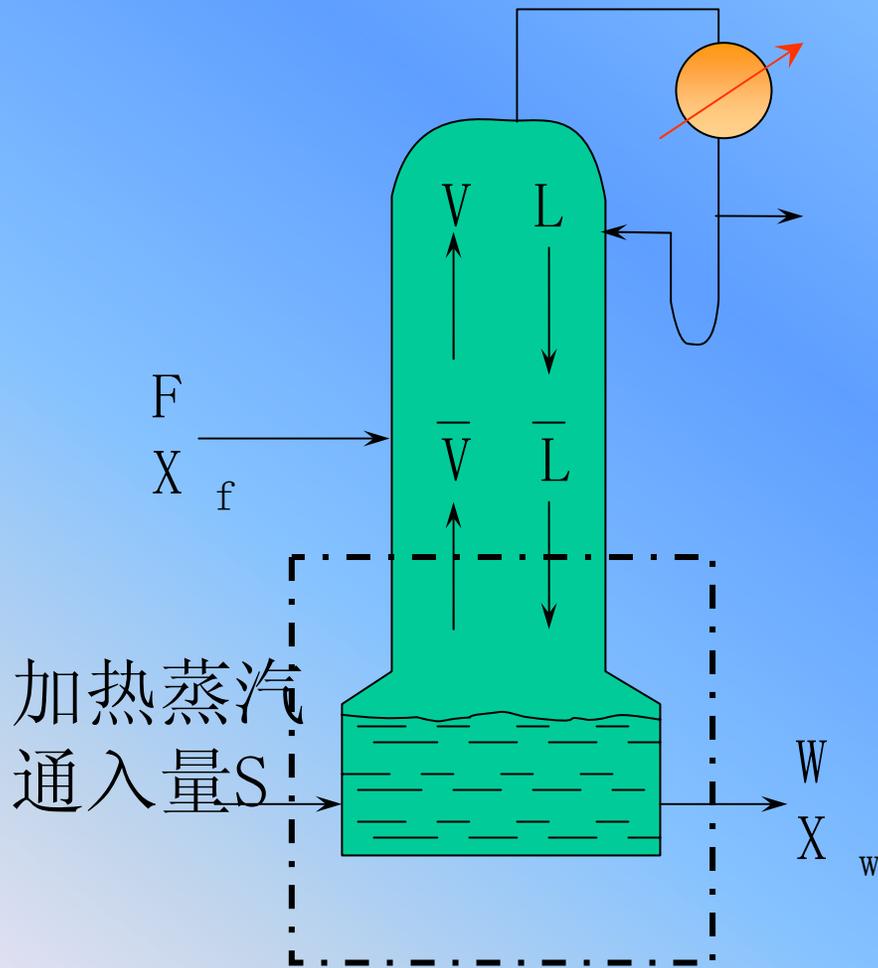


图 9-37 直接蒸汽加热



对精馏段作物衡，所得操作线方程与间接蒸汽加热是完全相同的。而对提馏段作物衡为：

$$\bar{L} + S = \bar{V} + W$$

$$\bar{V}y_{n+1} + W \cdot x_w = \bar{L}x_n$$

提馏段的操作方程为：

$$y_{n+1} = \frac{\bar{L}}{\bar{V}} x_n - \frac{W}{\bar{V}} x_w$$

对直接蒸汽加热时：

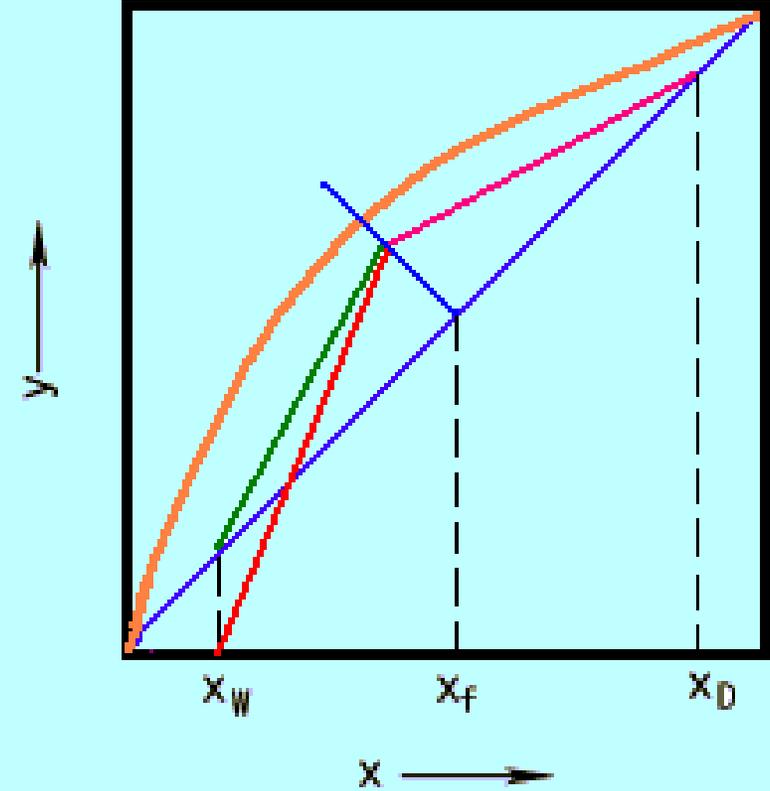
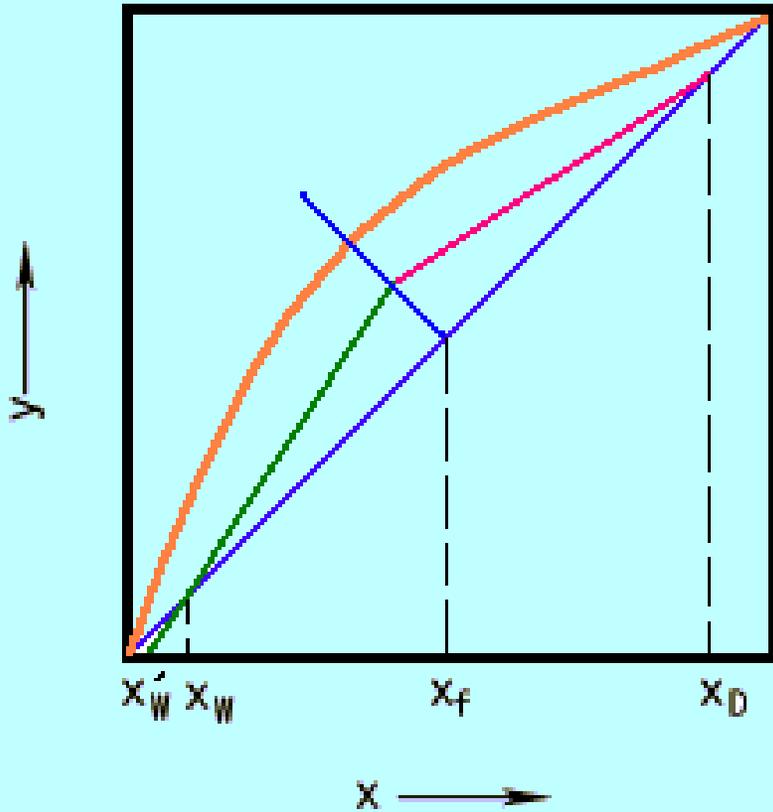
$$\bar{V} = S, \bar{L} = W$$

$$\therefore y_{n+1} = \frac{W}{S} x_n - \frac{W}{S} x_w$$

当  $x_n = x_w, y_{n+1} = 0$

此使提留段操作线通过  $(x_w, 0)$  点，  
比较直接蒸汽加热和筒接加热。

# 比较直接蒸汽加热和间接蒸汽加热





A、若  $x_f$ 、 $x_D$ 、 $x_w$  相同时，  $\eta_{\text{直轻}} < \eta_{\text{筒轻}}$

因为加热蒸汽的凝液排出时要带走少量轻组分

B、回收率相同的情况下  $x_w$  比间接加热时低

直接蒸汽的加入使釜液排放量W增加，根据物衡则  $X_w$  下降， $X_w$  的下降必然引起用直接蒸汽加热所需的理论板数增加。

塔顶冷凝量和塔釜蒸发量都有一定的关系，如：

$$V = L + D, V = (R + 1)D,$$

$$\bar{V} = V - (1 - q)F = (R + 1)D - (1 - q)F = S$$

结论：当加热状态和产量D一定时，加热蒸汽量取决于回流比。

## 2、多股加料

两种成分相同但浓度不同的料液可在同一塔内进行分离，两股料液可分别在适当的位置加入塔中。

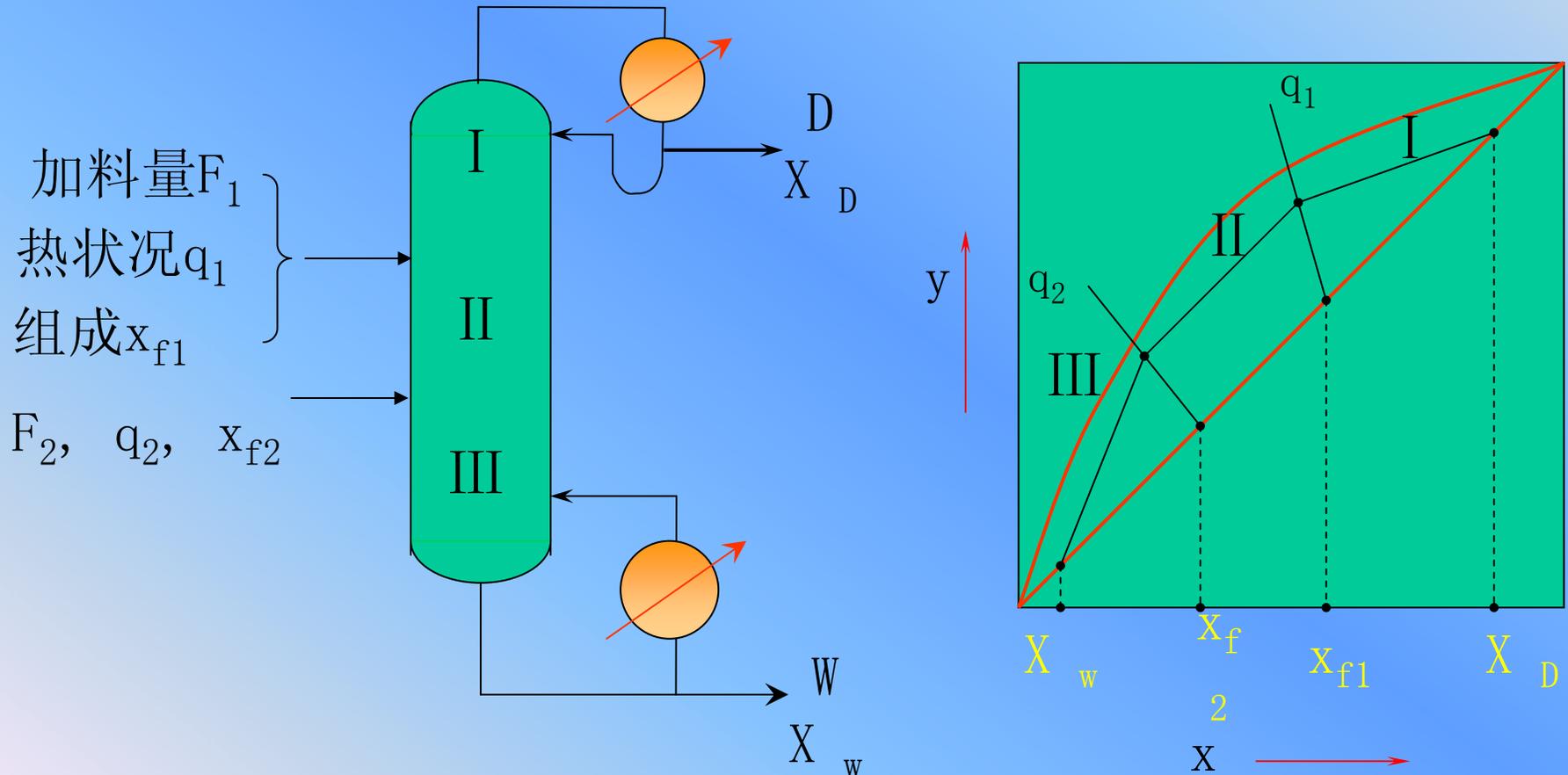


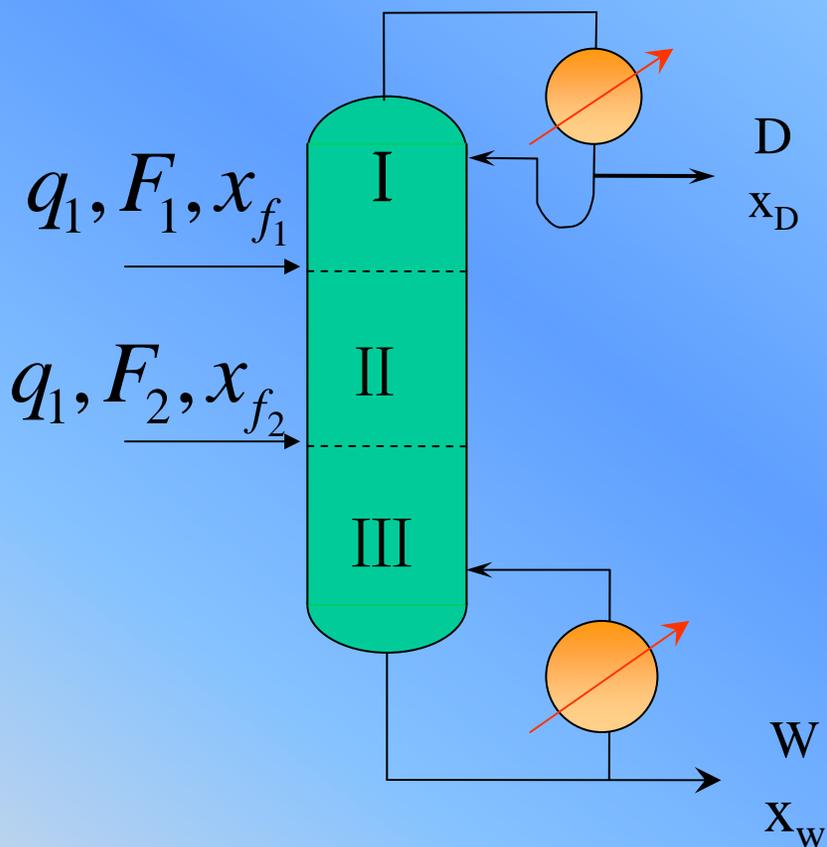
图 9-38 两股加热时的操作线



两股进料将塔分成三段，得三个操作线方程

$$\text{第 I 段: } \begin{cases} y_{n+1} = \frac{L}{V} x_n + \frac{D}{V} x_D = \frac{R}{R+1} x_n + \frac{x_D}{R+1} \\ L = RD \quad V = (R+1)D \end{cases}$$

$$\text{第 II 段: } \begin{cases} F_1 + V' = L' + D & F_1 x_{F1} + V' y_{s+1} = L' x_s + D x_D \\ \longrightarrow \begin{cases} y_{s+1} = \frac{L'}{V'} x_s + \frac{D x_D - F_1 x_{F1}}{V'} \\ V' = V - (1 - q_1) F_1, \quad L' = L + q_1 F_1 \end{cases} \end{cases}$$



I 段:  $Vy_{n+1} = Dx_D + Lx_n$

$$y_{n+1} = \frac{L}{V} x_n + \frac{D}{V} x_D$$

II 段:  $V'y_{n+1} + F_1x_{f_1} = Dx_D + L'x_n$

$$y_{n+1} = \frac{L'}{V'} x_n + \frac{Dx_D - F_1x_{f_1}}{V'}$$

当: ~~MEGALAN~~

$$\therefore \frac{L'}{V'} = \frac{L + q_1F_1}{V - (1 - q_1)F_1}$$

比较  $\frac{L'}{V'}$  和  $\frac{L}{V}$  的大小



$$q_1 = 0$$

$$\frac{L'}{V'} = \frac{L}{V - F_1} > \frac{L}{V}$$

$$q_1 = 1$$

$$\frac{L'}{V'} = \frac{L + F_1}{V} > \frac{L}{V}$$

$$0 < q < 1$$

$$\frac{L'}{V'} = \frac{L + q_1 F_1}{V - (1 - q_1) F_1} > \frac{L}{V}$$

$$q > 1$$

$$\frac{L'}{V'} = \frac{L + q_1 F_1 - F_1 + F_1}{V + (q_1 - 1) F_1} = \frac{L + (q - 1) F_1 + F_1}{V + (q_1 - 1) F_1} > \frac{L}{V}$$

$$q < 0$$

$$\frac{L'}{V'} = \frac{L - |q| F_1}{V - (1 + |q|) F_1} > \frac{L}{V}$$

结论：无论进料的热状态如何， II 段斜线总比 I 段的大



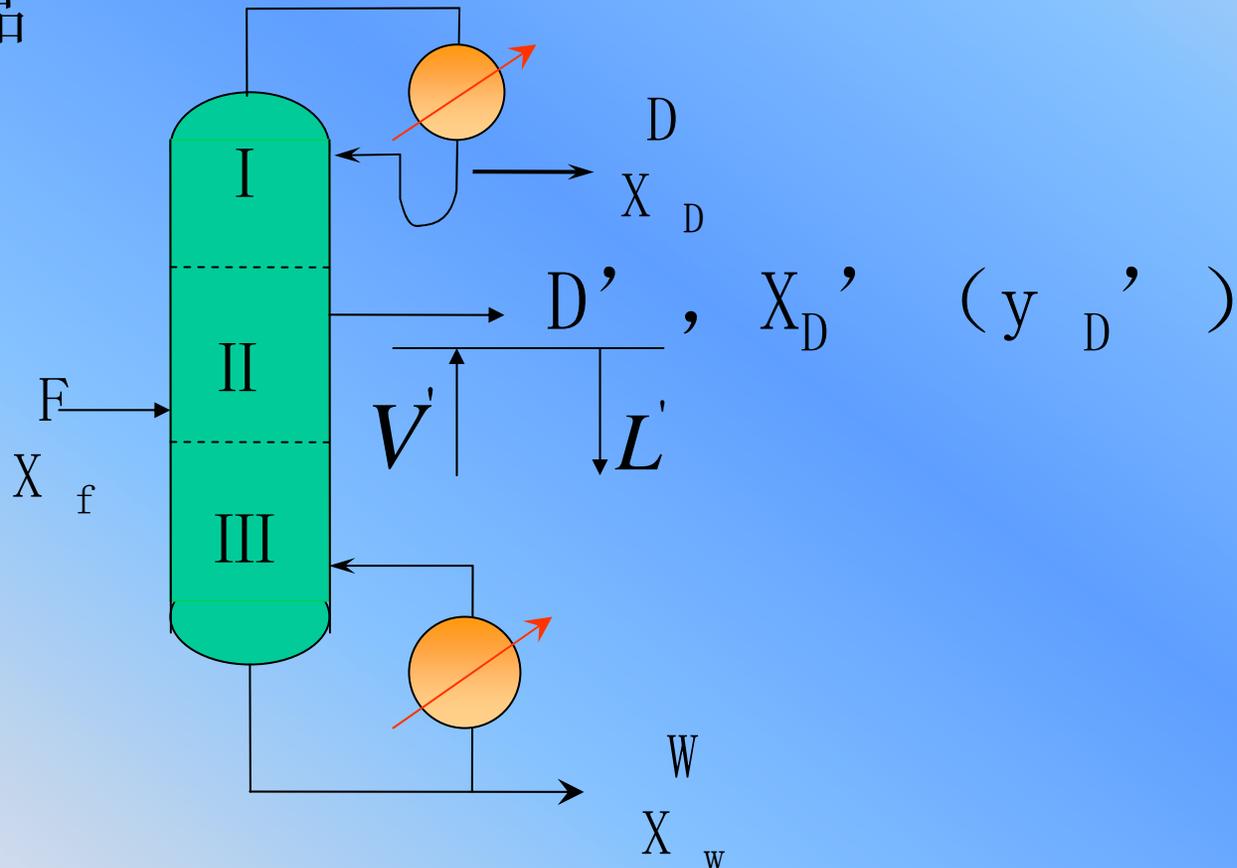
$$\text{第III段: } \begin{cases} y_{m+1} = \frac{L''}{V''} x_m - \frac{Wx_W}{V''} = \frac{L''}{V''} x_m + \frac{Dx_D - F_1x_{F1} - F_2x_{F2}}{V''} \\ V^\# = V^\ominus - (1-q_2)F_2 = V - (1-q_1)F_1 - (1-q_2)F_2 \\ L^\# = L^\oplus + q_2F_2 = L + q_1F_1 + q_2F_2 \end{cases}$$

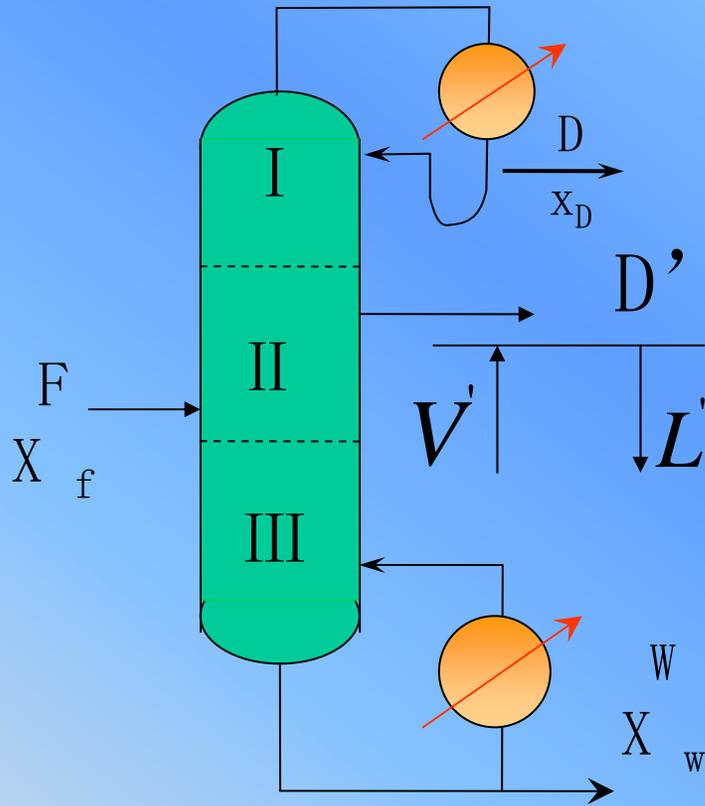
减小回流比R时，三段操作线都相平衡线靠拢， $N \uparrow$ ，当减小R到一定的程度，挟点可能在 I —— II 两段线的交点，也可能在 II —— III 两段线的交点。

如果将两股进料混合再在某一合适位置进料，能耗必定增加。因为混合与分离是两个相反的过程，精馏是消耗能量的。故任何形式的混合现象，必定意味着能耗的增加。

### 3、侧线出料

当需要组成不同的两种产品或多种产品时，可在塔内相应组成的塔板上抽出饱和蒸汽或泡点液体作为产品





$D', X_D'$  ( $y_d'$ )

I段

$$Vy_{n+1} = Dx_D + Lx_n$$

$$y_{n+1} = \frac{L}{V} x_D + \frac{D}{V} x_n$$

泡点采出

II段

$$V'y_{n+1} = Dx_D + D'x_D' + L'x_n$$

$$L = L' + D', L' = L - D', V = V'$$

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= \frac{L - D'}{V'} x_n + \frac{Dx_D + D'x_D'}{V'} \\
 &= \frac{L - D'}{V} x_n + \frac{Dx_D + D'x_D'}{V'} \\
 \therefore \frac{L - D'}{V} &< \frac{L}{D}
 \end{aligned}$$

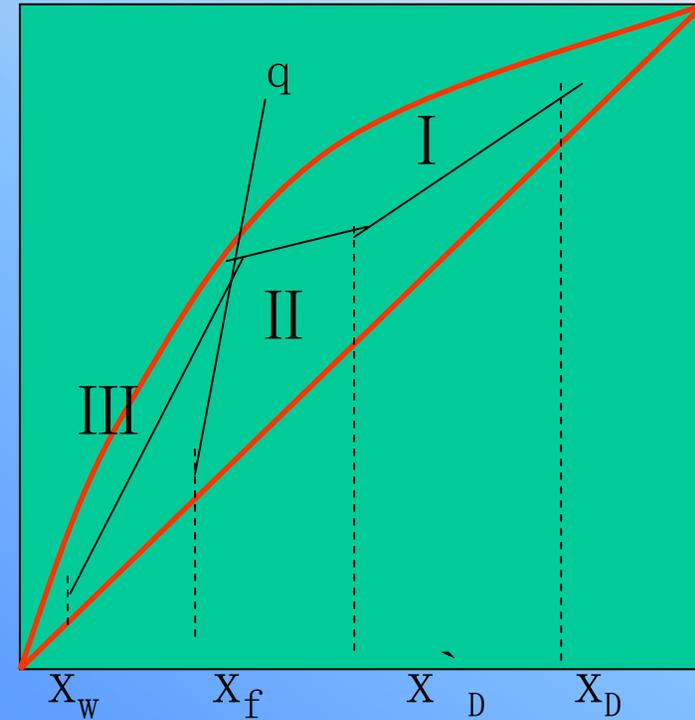
∴ 第 II 段的斜率小于第 I 段操作线的斜率

当饱和蒸汽引出时:

$$L = L', V' = V + D, V = V' + D'$$

$$\therefore y_{n+1} = \frac{L}{V + D'} x_n + \frac{D x_D + D' x_D'}{V + D'}$$

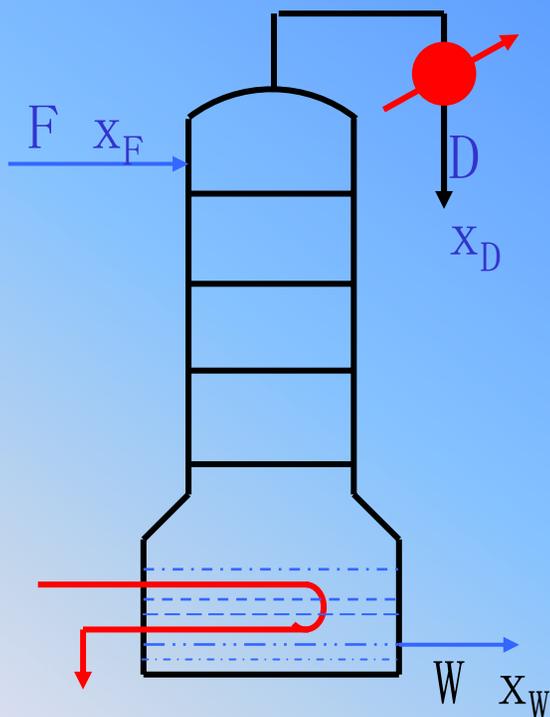
$$\therefore \frac{L}{V + D'} < \frac{L}{V} \quad \text{II 斜率小。}$$



由于 II 段斜率总是小于 I 段斜率。所以挟点一般出现在  $q$  线与平衡线的交点处。

# 4 回收塔

只有提馏段，没有精馏段的塔称为回收塔。如从稀氨水中回收氨



特点:

从第一块板加料，无精馏段，无回流，下降的液体由进料提供。

加料情况:

冷液或泡点进料。

当被处理的物料中所含易挥发组分量很少，但该组分必须回收，则可采用提馏塔，即：蒸馏的目的是为了回收稀溶液中易挥发组分，而对馏出液的浓度不作要求。

回收塔最简单的情况时无回流回收塔即：料液预热至泡点加入，塔顶蒸汽冷凝后全部作为产品，塔釜用间接蒸汽加热。

要提高  $x_D$  必须增大ba段的斜率  $\frac{\bar{L}}{\bar{V}}$

即：减小  $\bar{V}$  此时所需  $N \uparrow$  当操作线上端移到e点。馏出液浓度大  $x_{Dmax}$  最大

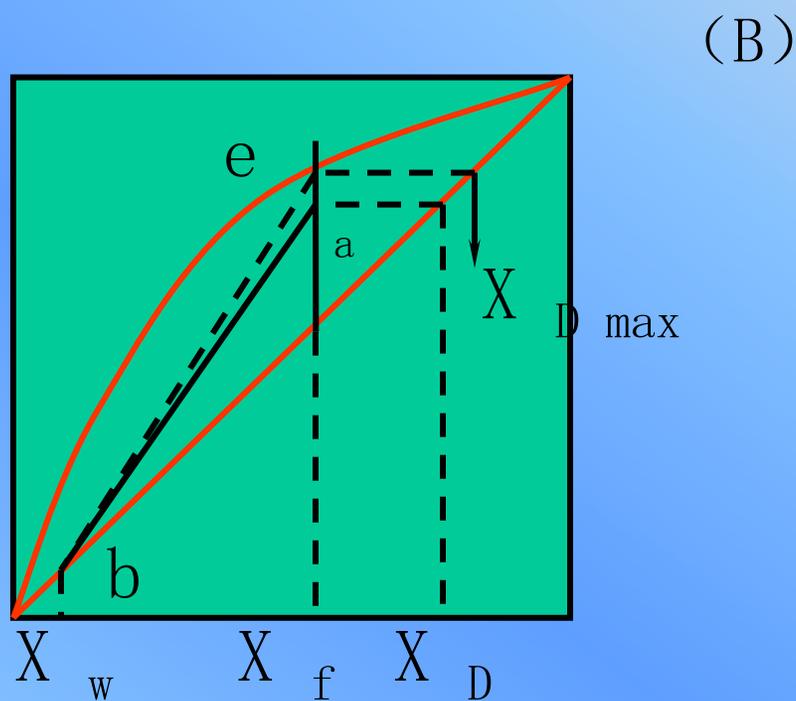
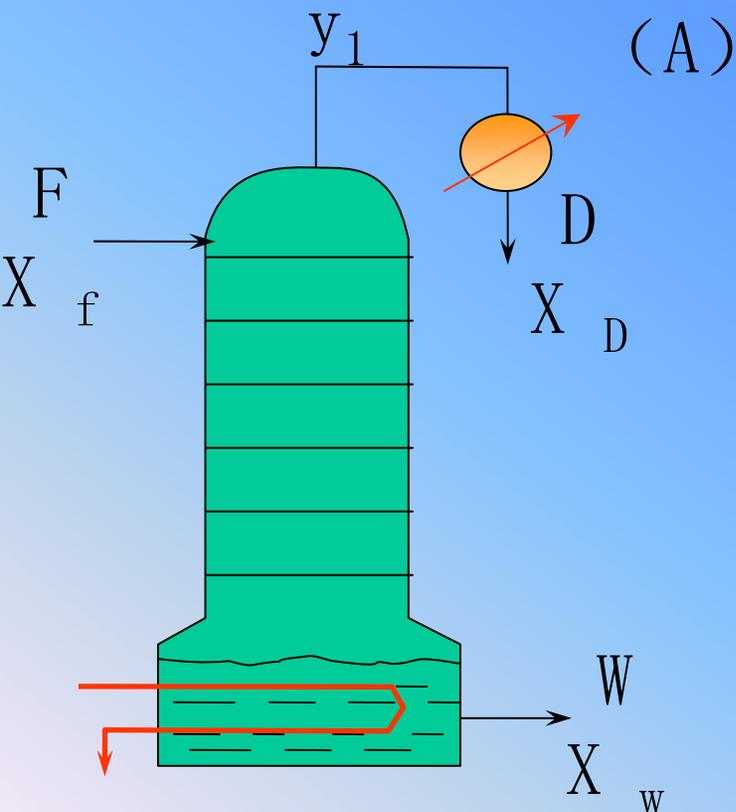
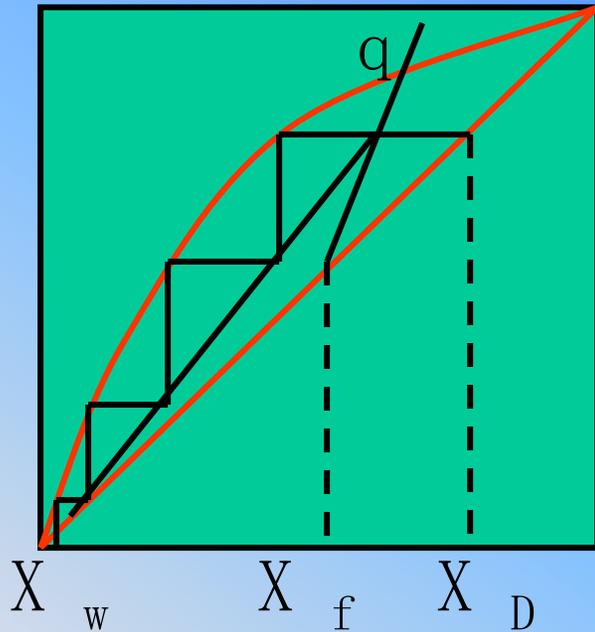


图 9-40 无回流时回收塔操作线

当进料为冷液进料，可与完整的精馏塔一作出 $q$ 线， $q$ 线与 $y=x_D$ 的交点为操作线的上端。如图：(c)



(C)

已知： $x_F$ ,  $F$ ,  $x_W$ ,  $\eta$

泡点进料

$$L' = F, \quad V' = D$$

$$\therefore y_{m+1} = \frac{F}{D} x_m - \frac{W}{D} x_W$$

例：回收塔分离乙醇水溶液，塔内有蒸馏釜，一块理论板，已知为泡点进料，要求  $x_D=0.6$ ， $x_W=0.1$ 。

求：  $x_F$ ，  $D/F$

## 五、平衡线位置线时理论板数的解析计算

双组分溶液在很低的浓度范围内，汽液平衡关系近似为一条直线。

$$y = kx$$

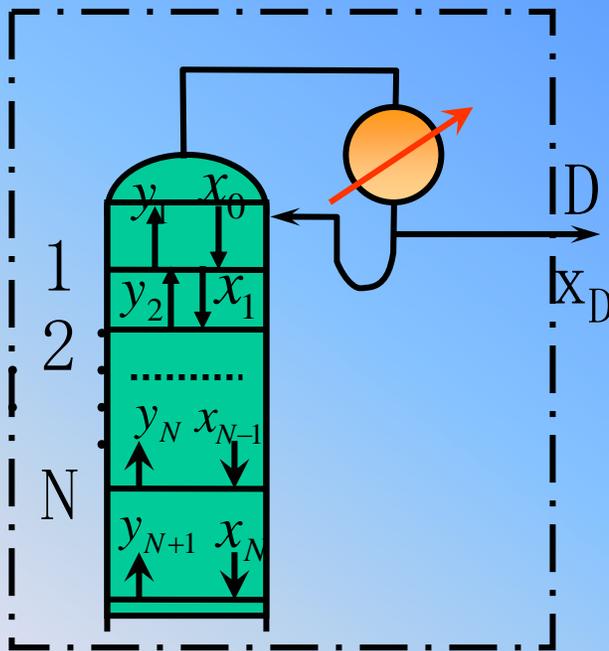
$$k = \text{cons}(t)$$

对第N块板作物料衡算，根据恒摩尔流的假定：

$$Vy_{N+1} + Lx_{N-1} = Vy_N + Lx_N$$

$$y_N = -\frac{L}{V}x_N + \left(y_{N+1} + \frac{L}{V}x_{N-1}\right)$$

$$= \frac{L}{V}x_{N-1} + \left(y_{N+1} - \frac{L}{V}x_N\right)$$





令：  $a = \frac{L}{V}$ ,  $b = y_{N+1} - \frac{L}{V} x_N$

$y_N = ax_{N-1} + b$  操作线和平衡线交替使用可解出N.

则：  $y_1 = ax_0 + b$

第一块板

$$x_1 = \frac{y_1}{K} = \frac{ax_0 + b}{K} = \frac{a}{K} x_0 + \frac{b}{K}$$

第二块板

$$y_2 = ax_1 + b = a\left(\frac{a}{K} x_0 + \frac{b}{K}\right) + b = \frac{a^2}{K} x_0 + \frac{ab}{K} + b$$

$$x_2 = \frac{y_2}{K} = \frac{a^2}{K^2} x_0 + \frac{a}{K} \cdot \frac{b}{K} + \frac{b}{K}$$

$$x_N = \left(\frac{a}{K}\right)^N x_0 + \left(\frac{a}{K}\right)^{N-1} \cdot \frac{b}{K} + \dots + \frac{a}{K} \cdot \frac{b}{K} + \frac{b}{K}$$



等比数列求和：
$$x_N = \left(\frac{a}{K}\right)^N x_0 + \left(\frac{b}{K}\right) \left[ \frac{(a/K)^N - 1}{(a/K) - 1} \right]$$

$$N = \frac{\ln \left[ \left(x_0 + \frac{b}{a-K}\right) / \left(x_N + \frac{b}{a-K}\right) \right]}{\ln \frac{K}{a}}$$

$$= \frac{1}{\ln \frac{1}{A}} \ln \left[ (1-A) \frac{x_0 - \frac{y_{N+1}}{K}}{x_N - \frac{y_{N+1}}{K}} + A \right]$$

其中：

$$\frac{1}{A} = \frac{KV}{L}$$

平衡线为直线的理论板数

